Université Paul Sabatier de Toulouse, année universitaire 2006-2007

CIMP, PHYSIQUE

Corrigé sommaire de l'épreuve CC3 du contrôle continu

Durée : 1 heure

A. Questions de cours (8 points)

Ondes stationnaires sur une corde de guitare

1) L'équation différentielle caractéristique d'une onde, qui se propage selon un axe Ox, a pour expression :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

v étant la vitesse de propagation de l'onde ou célérité.
Cette équation diffère d'une équation de diffusion par la présence d'une dérivation par rapport au temps d'ordre deux et non d'ordre un. Il en résulte une distinction fondamentale : l'équation de propagation d'une onde est invariante par changement de t en $-t$, contrairement à l'équation de diffusion essentiellement irréversible.

2) Une onde est dite stationnaire lorsque son expression *réelle* se met sous la forme du produit de deux fonctions séparées du temps et de l'espace. On démontre que cette expression s'écrit :

$$\Psi(x,t) = A\cos(\omega t + \phi_t)\cos(kx + \phi_x)$$

ω étant la pulsation temporelle et k sa pulsation spatiale ou nombre d'onde, lesquelles sont reliées par l'équation $\omega = kv$, v étant la vitesse de propagation ou célérité d'une onde progressive le long de l'axe Ox.
On voit que chaque point de l'axe, d'abscisse x, est un oscillateur harmonique dont l'amplitude varie avec x selon $|A\cos(\omega x + \phi_x)|$, d'où l'idée d'assimiler l'onde stationnaire à un ensemble d'oscillateurs harmoniques.

3) La corde de guitare étant fixée à ses deux extrémités, la plus grande longueur d'onde possible est celle pour laquelle $l = \lambda/2$, d'où $\lambda = 1,2$ m. Comme la fréquence du "la" est $f = 440$ Hz, la vitesse de propagation de l'onde progressive associée vaut :

$$v = \lambda f = 1,2 \times 440 = 528\,\mathrm{m.s^{-1}}$$

L'ordre de grandeur de la vitesse de propagation dans l'air de l'onde acoustique émise par la guitare est $330\,\mathrm{m.s^{-1}}$. Dans l'eau elle est de l'ordre de $1\,500\,\mathrm{m.s^{-1}}$, Les ondes mécaniques se propagent plus rapidement dans les milieux condensés que dans les milieux dilués, contrairement aux ondes électromagnétiques dont la lumière.

B. Problème (12 points)

Exploration de Titan par la sonde Cassini-Huygens

1. a) La force qu'exerce Saturne sur son satellite naturel Titan est (**1 pt**) :

$$\mathbf{F}_{\mathcal{S}\to\mathcal{T}} = -\frac{GM_{\mathcal{S}}M_{\mathcal{T}}}{ST^2}\left(\frac{\mathbf{ST}}{ST}\right)$$

d'où (**0,5 pt**) :

$$F_{\mathcal{S}\to\mathcal{T}} = \frac{6,67\times 10^{-11}\times 105,65\times 2,25\times 10^{-2}\times 36\times 10^{48}}{(1,222\times 10^9)^2} = 0,383\times 10^{21}\,\mathrm{N}$$

Le champ de gravitation correspondant s'en déduit aisément en divisant la force par la masse de Titan :(**1 pt**)

$$\mathcal{G} = \frac{0,383\times 10^{21}}{2,25\times 6\times 10^{24}} = 0,284\,\mathrm{m.s^{-2}}$$

2. a) Appliquons, par rapport au référentiel galilén $\mathcal{R}_S$, la deuxième loi de Newton au mouvement circulaire uniforme de $\mathcal{T}$ autour de S, dans le système de coordonnées de Frenet. Il vient (**1,5 pt**) :

$$M_{\mathcal{T}}\frac{v_T^2}{ST}\,\mathbf{e}_n = \frac{GM_{\mathcal{S}}M_{\mathcal{T}}}{ST^2}\,\mathbf{e}_n \quad \text{d'où} \quad v_{\mathcal{T}} = \left(\frac{GM_{\mathcal{S}}}{ST}\right)^{1/2}$$

(**0,5 pt**) L'application numérique donne (**0,5 pt**) :

$$v_{\mathcal{T}} = \left(\frac{6,67\times 10^{-11}\times 105,65\times 6\times 10^{24}}{1,222\times 10^9}\right)^{1/2} = 5,882\,\mathrm{km.s^{-1}}$$

La masse de Titan n'intervient pas en raison de l'égailté de la masse grave et de la masse inerte. C'est le principe d'équivalence de la relativité générale d'Eisntein (**0,5 pt**).

b) La période de révolution de Titan autour de Saturne s'obtient aisément selon :

$$T_{\mathcal{T}} = \frac{2\pi ST}{v_{\mathcal{T}}} = \frac{2\pi\times 1,222\times 10^9}{5,882\times 10^3} = 1,3\times 10^6\,\mathrm{s}$$

(**1,5 pt**) soit environ 15 jours terrestres, puisque 1 jour $= 24\times 3\,600 = 86\,400$ s (**0,5 pt**).

3. a) Le champ de gravitation sur la surface de Titan est le rapport de la force de gravitation sur la masse du corps placé sur sa surface (**1 pt**) :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{T}} = \frac{GM_{\mathcal{T}}m_A}{m_A TA^2} = \frac{GM_{\mathcal{T}}}{TA^2}$$

d'où (**0,5 pt**) :

$$\mathcal{G}_{\mathcal{T}} = \frac{6,67\times 10^{-11}\times 2,25\times 10^{-2}\times 6\times 10^{24}}{(2,575\times 10^6)^2} = 1,358\,\mathrm{m.s^{-2}}$$

soit environ $g/7$, puisque $g = 9,81\,\mathrm{m.s^{-2}}$. (0,5 pt)

b) La variation d'énergie cinétique de la sonde Huygens s'obtient aisément (**0,5 pt**) :

$$\Delta\mathcal{E}_k = \frac{M_H}{2}(v_f^2 - v_i^2) = 175(36 - 36\times 10^6) \approx -6,3\,\mathrm{GJ}$$

Quant à la variation de son énergie potentielle, on la calcule selon (**0,5 pt**) :

$$\Delta\mathcal{E}_p = M_H\mathcal{G}\Delta h = 350\times 1,358\times 3\times 10^5 = 0,143\,\mathrm{GJ}$$

c) Le théorème de l'énergie mécanique se résume ainsi :

$$\Delta(\mathcal{E}_k + \mathcal{E}_p) = W_f \quad \text{avec} \quad \Delta\mathcal{E}_k \approx -6,3\,\mathrm{GJ} \quad \text{et} \quad \Delta\mathcal{E}_p \approx 0,143\,\mathrm{GJ} \quad \text{d'où} \quad W_f = -6,157\,\mathrm{GJ}$$

Cette variation globale négative de l'énergie mécanique s'explique aisément par le travail négatif des forces de frottement (atmosphère et parachute).(**1,5 pt**)

Fig. S1